

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DE UNA MAESTRA DE MATEMÁTICAS EN EJERCICIO: DISCUSIÓN SOBRE CAMBIOS EN TORNO A LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Isabel Moreno de Barreda Ribed – Edelmira Badillo Jiménez
isabel.morenodb@gmail.com – Edelmira.Badillo@uab.cat
Universitat Autònoma de Barcelona, España

Núcleo temático: (IV) Formación del profesorado de matemáticas

Modalidad: (CB) Comunicación Breve

Nivel educativo: (5) Formación y actualización docente

Palabras clave: Conocimiento didáctico matemático; pensamiento numérico; intervención formativa

Resumo

Se presenta un resultado del análisis sobre el conocimiento didáctico matemático de una maestra en ejercicio sobre operaciones aritméticas. La mirada al conocimiento del profesor sigue los estudios realizados por Shulman (1986) y otros modelos más recientes como el MKT o el MTSK. El análisis da cuenta de una evolución en la manera de acercarse a la práctica matemática a lo largo de una intervención formativa con base en la escuela. El contexto centra la práctica de aula en el desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes. Se discute la influencia de los instrumentos formativos utilizados en los cambios de conocimiento didáctico matemático identificados. Estos resultados sugieren una definición de desarrollo profesional en el que el contenido matemático centra la reflexión sobre la práctica y la discusión en comunidad para sostener el ejercicio de una práctica fundamentada en un creciente conocimiento didáctico del contenido.

Existen numerosas investigaciones centradas en el conocimiento del profesor de matemáticas que buscan, con su estructura particular, desarrollar y comprender mejor el conocimiento del profesor que Shulman (1986) subrayó ser más amplio que el mero conocimiento del contenido. Más escasas son las investigaciones sobre desarrollo de este conocimiento a lo largo de un periodo de tiempo. El trabajo que presenta en parte este informe se adentra en un estudio longitudinal del conocimiento didáctico del contenido. Se enfatiza el dinamismo de cambio de práctica que permita dar cuenta de un aspecto del desarrollo profesional.

Considerando estos principios, las preguntas de investigación que nos planteamos son:

- ¿Cuál es el conocimiento didáctico matemático de una maestra acerca de la multiplicación observable a lo largo de contextos de reflexión sobre la práctica vinculados a una intervención formativa?

- ¿Cómo esta intervención formativa influye en el desarrollo de dicho conocimiento?

El texto se centra en la discusión de un resultado sobre cambios en el conocimiento didáctico matemático manifestados en la reflexión sobre la práctica y los indicios de influencia de la formación en esos cambios.

Posicionamiento teórico

Este estudio parte del convencimiento de que el desarrollo profesional influye en la transformación de las prácticas del aula, con este fin busca investigar el desarrollo del conocimiento didáctico enfatizando el refinamiento de la práctica docente que se ve influenciada por el nuevo conocimiento desarrollado (Lin y Rowland, 2016).

La identificación de contenidos matemáticos es clave en este trabajo para centrar la investigación sobre el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas en torno a un contenido concreto de enseñanza y aprendizaje. Tras una revisión de la literatura al respecto se especifican el sistema decimal posicional (valor posicional y composición-descomposición), la estructura multiplicativa y el cálculo de la multiplicación (tablas de multiplicar, estrategia de multiplicar por diez, algoritmos, propiedades de las operaciones y estrategias de cálculo) como contenidos matemáticos relevantes para el aprendizaje de la multiplicación (Zazkis y Mamolo, 2016).

El conocimiento propio del profesor en este estudio parte de las componentes propuestas por Shulman (1986): conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular. En la última década otras investigaciones estructuran con más detalle el conocimiento específico del profesor. Los marcos propuestos por Ball, Phelps y Thames (2008), el conocimiento matemático para la enseñanza, y por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), conocimiento especializado del profesor de matemáticas, han servido para cruzar y redefinir, en base a los datos y a la luz de la teoría, aspectos del conocimiento didáctico matemático y códigos fundamentados en los datos.

A continuación se expone brevemente los aspectos considerados en este estudio dentro del conocimiento didáctico matemático del profesor:

- Identificación y fundamentación de contenidos matemáticos: que sirve para poner de manifiesto el conocimiento matemático del profesor
- Identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido matemático: vinculado al conocimiento pedagógico del contenido, centra su interés en la enseñanza del contenido. Engloba por una parte la identificación de contenidos matemáticos relevantes para el aprendizaje de los alumnos, la identificación de prácticas de enseñanza que trabajen esos contenidos; por otra la identificación de cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza que lleva a una reflexión concreta sobre la práctica; y la identificación de relaciones entre contenidos en la práctica de enseñanza.
- Identificación e interpretación del conocimiento de los estudiantes: esta interpretación parte de la identificación teórica de relaciones de los estudiantes con el contenido al analizar la complejidad o potencial de una tarea matemática o práctica a la hora de identificar respuestas correctas o contenidos matemáticos que no son comprendidos por los alumnos.

Experimentación y métodos de análisis

La metodología de investigación cualitativa que se ha aplicado es un estudio de caso en orden a profundizar en el conocimiento didáctico matemático. El caso es una maestra de 3º de primaria, que llamaremos Leire, con unos 20 años de experiencia docente. La intervención formativa con base en la escuela que contextualiza el estudio duró tres años con una implementación progresiva, en la que la maestra participa en su totalidad.

Los datos recogidos giran en torno a reflexiones sobre la práctica, tanto individuales como en sesiones de discusión conjunta: 6 grabaciones de sesiones de discusión; 4 entrevistas semiestructuradas; diario del profesor y 6 guiones de reflexión individual. Con lo que nuestra mirada al conocimiento didáctico matemático de la maestra se realiza a través de su reflexión sobre la práctica. Para la validación de resultados se acude a fuentes secundarias de grabación de sesiones de clase y correos electrónicos.

El análisis se ha realizado en tres fases: una primera reducción de datos en la que se seleccionan las citas vinculadas a los contenidos matemáticos relevantes en este estudio; la codificación de citas tras la definición de códigos del conocimiento didáctico matemático a

partir de los datos y de la teoría (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2013; Shulman, 1986); y una codificación del cambio en el conocimiento didáctico matemático identificado mediante cuatro indicadores de desarrollo inspirados en algunos de los que Carrillo y Climent (2011) utilizan para identificar evidencias de mejora en la comprensión de la práctica de los profesores.

Discusión de un resultado

El resultado que se presenta versa sobre el algoritmo de la multiplicación. Esta sección muestra por una parte el conocimiento didáctico matemático que se ha identificado en torno a este contenido a lo largo de la intervención. Por otra, muestra evidencias de cambios identificados y las influencias de la formación que han podido intervenir en esos cambios.

Las primeras referencias explícitas que obtenemos a cerca del algoritmo de la multiplicación se extraen de la 2ª sesión de formación del curso 2011-12. Durante la reunión de reflexión, Carla, la maestra paralela de Leire, plantea la pregunta de cómo enseñar el algoritmo de la multiplicación. Se evidencia que ha habido una reflexión entre las dos maestras de tercero sobre la forma de enseñar a multiplicar, considerando oportuno apartarse de la propuesta habitual del libro de texto. En la Tabla 1 se muestra un ejemplo de cita con los códigos de conocimiento didáctico matemático aplicados a los contenidos matemáticos relevantes y codificados con el indicador de desarrollo.

Transcripción de la cita	Código de conocimiento	Indicador de desarrollo
Carla: Ahora con Leire hablábamos, al empezar la multiplicación, ¿cómo la hacemos? [...] Así que estábamos hablando de cómo hacerla, queríamos preguntarte cómo podemos hacerla. De qué manera hacerla. Formadora: ¿Cuándo empezaréis a enseñarla? Leire: Ya. ... No, ya dijimos "esta página del libro no la haremos". [...] Se tiene que hacer en el cuaderno y lo haremos de la forma que decidamos entre todos hacerlo. (Enero 2012)	Considera el trabajo de los contenidos matemáticos (ALGORITMO) en libros de texto Muestra interés por un cambio de práctica (ALGORITMO)	Cuestiona elementos de la práctica

Tabla 1. Cuestionamiento sobre la enseñanza de la multiplicación

El guión de reflexión que rellenan durante la reunión refuerza el cuestionamiento de la práctica ya señalado: *A mí me hace cuestionarme muchas cosas: cómo enseñar los algoritmos. (Enero 2012)*

La respuesta que proporciona la formadora a la cuestión planteada es el algoritmo en columnas desarrollado que enfatiza el uso del valor posicional de las cifras, la descomposición numérica y el uso de la propiedad distributiva para el cálculo de la operación.

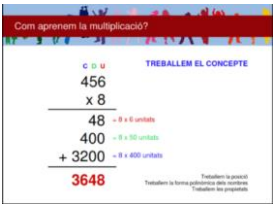


Figura 1. Diapositiva sobre la nueva manera de enseñar a multiplicar en la Escuela La reflexión individual que realiza Leire tras *la incorporación a la práctica de la enseñanza* del algoritmo en columnas desarrollado evidencia la identificación de la propiedad distributiva en la enseñanza de la operación multiplicativa, contenido perteneciente al curriculum de 4º de primaria. Evidencia también una *valoración del uso de contenidos matemáticos en la práctica* por la facilidad que supone esta nueva forma de enseñar para la comprensión de los estudiantes.

Transcripción de la cita	Código de conocimiento	Indicador de desarrollo
Hace años que pienso que siempre pedimos a los niños los algoritmos y si eso realmente es tan importante. Lo es, pero creo que tener el concepto claro lo es mucho más. Con mi compañera, después de esa reunión decidimos enseñar la multiplicación aplicando la propiedad distributiva y los niños y niñas lo entendieron en seguida. (Marzo 2012)	Identifica un contenido matemático (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA) que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea (ALGORITMO)	Incorpora a su práctica de enseñanza Valora contenidos matemáticos y estrategias de enseñanza en relación con el proceso de enseñanza aprendizaje

Tabla 2. Incorporación a su práctica de enseñanza de la multiplicación y valoración Identifica también explícitamente el trabajo del valor posicional en la operación y prácticas de enseñanza que *valora como positivas* para sus alumnos.

Transcripción de la cita	Código de conocimiento	Indicador de desarrollo
Hacemos multiplicaciones, salen a corregir..., pero yo pongo la misma multiplicación y uno lo hace tradicionalmente y el otro lo hace trabajando la posición del número. Y los dos ahí... lo hacen fantásticos. No sé, lo encuentro que es muy interesante. (Marzo 2012)	Identifica un contenido matemático (VALOR POSICIONAL) que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes Identifica estrategias de enseñanza para trabajar un	Valora contenidos matemáticos y estrategias de enseñanza en relación con el proceso de enseñanza aprendizaje

	contenido matemático (ALGORITMO)	
--	-------------------------------------	--

Tabla 3. Valoración una estrategia de enseñanza

Al curso siguiente, Leire afirma que *mantiene en el tiempo la práctica de enseñanza* de la multiplicación en columnas y explicita el uso de la descomposición numérica. Con esto quedan identificados todos los contenidos matemáticos relevantes que sostienen esta práctica matemática.

Transcripción de la cita	Código de conocimiento	Indicador de desarrollo
Leire: La multiplicación la hacemos descomponiendo... Claro porque al ver: esto es cien por tres, esto veinte por... Ostras. Investigadora: Es más fácil Leire: Pero bastante más. (Noviembre 2012)	Identifica un contenido matemático (COMPOSICIÓN-DESCOMPOSICIÓN) que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes Identifica estrategias de enseñanza para trabajar un contenido matemático (ALGORITMO)	Valora contenidos matemáticos y estrategias de enseñanza en relación con el proceso de enseñanza aprendizaje Mantiene su práctica

Tabla 4. Mantiene y valora una estrategia de enseñanza

Finalmente se advierte en los datos de Leire una *transferencia de prácticas*, en el sentido de que, al incorporar la nueva práctica de enseñanza de la multiplicación de forma sostenida en el tiempo, Leire identifica nuevas prácticas relacionadas que permiten dar a sus alumnos un paso adelante en el razonamiento matemático:

Transcripción de la cita	Código de conocimiento	Indicador de desarrollo
Hay dos temas de matemáticas que son de multiplicación, como que la hacen [en el libro de texto] tradicionalmente, el primer tema es sin llevarse nada y el segundo tema con llevadas. Pero como nosotros lo hacemos así, son dos temas de multiplicación. Y pensé, ¿y si lo hacemos así? Se me ocurrió. "Vamos a hacerlo en horizontal. Ya sé que no entenderéis mucho". Pero bueno, hemos hecho unos cuantos. A veces dudan, ¿qué tenemos que hacer, multiplicar? Pero bueno. (Febrero 2013)	Considera el trabajo de los contenidos matemáticos (ALGORITMO) en libros de texto Identifica un contenido matemático (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA) que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes Identifica el trabajo de contenidos matemáticos de cursos posteriores (SIMBOLIZACIÓN, PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)	Transfiere a nuevas prácticas reflexiones en torno a contenidos matemáticos

Tabla 5. Transfiere a nuevas prácticas

Estas prácticas se alejan de la propuesta del libro de texto e incorporan elementos de cursos posteriores en su aula como es la notación con paréntesis de la propiedad distributiva.

Para responder a la pregunta sobre qué conocimiento didáctico matemático se pone de manifiesto, el análisis evidencia una complejización del conocimiento que se muestra al ir incorporando conscientemente diversos contenidos matemáticos involucrados en la práctica y al cruzar los diferentes aspectos del conocimiento matemático.

La secuencia de estas citas pone de relieve un desarrollo en la práctica de enseñanza de la maestra. Parte de un cuestionamiento sobre una práctica habitual de enseñanza que se considera que puede mejorarse profundizando en el contenido matemático. Se incorpora una nueva práctica de enseñanza que propone en una discusión conjunta durante la formación. Esa incorporación lleva a valorar los efectos que produce en los estudiantes al considerar que facilita el aprendizaje del contenido. Para hablar de desarrollo resulta importante resaltar que esa práctica se mantiene en el tiempo. De hecho, esa facilidad que adquiere permite a la maestra innovar prácticas que incorporan nuevos elementos matemáticos y preparan para contenidos que se aprenderán en cursos posteriores.

Para responder a la segunda pregunta de investigación sobre influencias de la intervención formativa, empezamos resumiendo brevemente los ejes formativos sobre los que se sustenta: (a) acercar la investigación en didáctica de las matemáticas al aula, mediante el uso de un proyecto de innovación en estrategias de cálculo, la resolución de problemas y el uso de representaciones; (b) hacer emerger situaciones ricas en el aula para su posterior análisis, mediante la observación de prácticas de enseñanza ajenas y el análisis didáctico de vídeo-episodios de aula propios o ajenos (c) propiciar situaciones colaborativas de reflexión sobre el contenido didáctico, mediante sesiones de discusión con la formadora y los maestros del ciclo y el diálogo con la formadora (Badillo y Moreno, 2012).

Los datos presentados en este contexto formativo muestran que Leire ha recorrido un proceso de desarrollo en su práctica respecto de la enseñanza del algoritmo de la multiplicación. El cuestionamiento sobre el algoritmo surge de la discusión sobre la práctica que mantienen las dos maestras de 3° y que deciden trasladar a la reflexión entre la formadora y maestros del ciclo: *Se tiene que hacer en el cuaderno y lo haremos de la forma que decidamos entre todos hacerlo (Enero 2012)*. Este dato remite a una capacidad para llevar a cabo una acción de enseñanza determinada por la comunidad que forman las maestras del ciclo con la formadora. En la incorporación del trabajo de la propiedad distributiva mediante la simbolización con el uso de paréntesis también se percibe una influencia de la intervención formativa, puesto que

responde a elementos matemáticos trabajados durante la discusión conjunta sobre un vídeo-episodio de la maestra. El curso anterior a esta transferencia a otras prácticas de enseñanza, Leire había explicado una estrategia propuesta por el proyecto de innovación aportado por la formación. La estrategia de multiplicar por once descomponiendo el número en diez más uno. Durante su práctica Leire había utilizado incorrectamente la simbolización matemática de la propiedad distributiva y del signo igual. Sólo durante el análisis de ese vídeo-episodio en la discusión con la formadora y los maestros del ciclo, Leire descubre su error y comienza a corregirlo en su práctica. Se considera que esta toma de conciencia del error cometido en la simbolización supone un aprendizaje en la maestra por la transferencia que hace a la hora de enseñar la multiplicación “en horizontal”, es decir, mediante el uso de la simbolización de paréntesis para la aplicación de la descomposición y propiedad distributiva.

Así, se evidencia la influencia de dos ejes fundamentales de la formación: la promoción de la reflexión sobre la práctica de enseñanza del contenido matemático en discusiones conjuntas y el análisis de prácticas observadas (vídeo-episodios). Estos elementos resultan ser clave para la innovación de prácticas de enseñanza y la toma de conciencia errores matemáticos llevados a cabo en la práctica.

Consideraciones finales

El resultado seleccionado da cuenta de un desarrollo en el conocimiento didáctico matemático del profesor. Para hablar de desarrollo, se considera necesario dar cuenta de cambios en el conocimiento didáctico matemático, manifestados en la complejización del mismo por un aumento de conciencia de los elementos clave en la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático. Está demostrado que la discusión de buenas prácticas observadas influye en el desarrollo de la comprensión de la práctica y de la capacidad de análisis de la misma (Carrillo y Climent, 2011). En esta comunicación se ha puesto en evidencia que los entornos colaborativos de reflexión sobre prácticas de enseñanza sirven para tomar conciencia de nuevas formas de enseñanza y para la identificación de errores en la práctica. No sólo el análisis de buenas prácticas proporciona base de reflexión para un desarrollo profesional, la reflexión conjunta sobre errores de la propia práctica puede suponer una oportunidad de aprendizaje para los maestros. Sobre todo, para conducir a cambios de práctica sostenidos en el tiempo.

Los resultados sugieren una definición de desarrollo profesional centrada en el contenido matemático: el crecimiento profesional del profesor manifestado en el cambio de práctica sostenido en el tiempo y fundamentado en un mayor conocimiento didáctico del contenido, apoyado en la reflexión sobre la práctica y la discusión en comunidad.

Agradecimientos

Este trabajo de tesis doctoral se enmarca en la agenda científica del Proyecto EDU2015-65378-P, “Construcción de conocimiento matemático escolar. Discurso del profesor y actividad de enseñanza”, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias bibliográficas

- Badillo, E. y Moreno, I. (2012). Case Study Report 2: Group of Teachers from the MDL School The local context of the field actions. Public report of TRACES project (7FP, EC). Localizable en https://ddd.uab.cat/pub/worpaper/2012/151550/SPAIN_CASE_STUDIES_REPORT_DEF.pdf
- Ball, D. L., Phelps, G. C. y Thames, M. H. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers’ expertise through their analysis of good practice in the mathematics classroom. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 43(6), 915–926.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985–2994). Antalya, Turquía: ERME.
- Lin, F.-L. y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers’ knowledge and professional development. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483–520). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Zazkis, R. y Mamolo, A. (2016). On numbers: concepts, operations and structure. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 39–71). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.